



INTORNO ALLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI SIMULTANEE

$$x^2 + h = y^2 , \quad x^2 - h = z^2 .$$

NOTA

DI BALDASSARRE BONCOMPAGNI

SOCIO ORDINARIO DELL'ACCADEMIA PONTIFICIA
DE' NUOVI LINCEI

*Estratta dagli Annali di Scienze
Matematiche e Fisiche pubblicati in Roma
Aprile 1855*

ROMA
Tipografia delle Belle Arti
1855
Piazza Poli n 91.



INTORNO ALLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI SIMULTANEE
$x^2 + h = y^2$, $x^2 - h = z^2$.



Nel suo *Liber quadratorum* Leonardo Pisano si propone il seguente problema (1): « Trovare quattro numeri razionali » h, x, y, z tali che si abbia simultaneamente:

$$\text{(A)} \begin{cases} x^2 + h = y^2 \\ x^2 - h = z^2 \end{cases}$$

Leonardo Pisano nella sua opera suddetta dimostra (2) che questi numeri sono:

$$\text{(B)} \begin{cases} h = 4mn(m+n)(m-n) \\ x = \pm(m^2+n^2) \\ y = \pm(2mn+(m^2-n^2)) \\ z = \pm(2mn-(m^2-n^2)) \end{cases}$$

m, n, essendo numeri razionali.

Il numero

$$4mn(m+n)(m-n)$$

è chiamato *congruo* nell'opera sopraccitata di Leonardo Pisano (3). Fra Luca Pacioli nella sua opera intitolata *Summa*

---

(1) Codice Ambrosiano *E*. 75, *Parte superiore*, carta 27, *recto*, lin. 11—12.— *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre Boncompagni secondo la lezione di un codice della Biblioteca Ambrosiana di Milano. Firenze Tipografia Galileiana di M. Cellini e C.* 1854, in 8°, pag. 83, lin. 19—21.

(2) Codice Ambrosiano *E* 75, *Parte superiore*, carta 27, *recto*, lin. 12—33, carta 27, *verso*, carte 28—29, carta 30, *recto*, lin. 1—18.— *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, pag. 83, lin. 21—28, pag. 84—92, pag. 93, lin. 1—3.

(3) Codice Ambrosiano *E*. 75, *Parte superiore*, carta 26, *verso*, lin. 26—27, carta 27, *recto*, lin. 21. — *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, pag. 82, lin. 24—25, pag. 84, lin. 6—7.

de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità chiama *congruente* questo numero (1), e *congruo* il numero

$$m^2 + n^2.$$

Siano a l'ipotenusa, b, c i cateti, ed S l'area di un triangolo rettangolo. Si avrà:

$$\text{(C)}\quad S = \frac{1}{2}bc = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 .$$

Se

$$a = 2(m^2 + n^2)\ ,\quad b = 4mn\ ,\quad c = 2(m^2 - n^2)$$

l'equazione (C) dà

$$\text{(D)}\left\{\begin{aligned} S = h &= 4mn(m^2 - n^2) = 4mn(m+n)(m-n) \\ &= (2mn + (m^2 - n^2))^2 - (m^2 + n^2)^2 \\ &= (m^2 + n^2)^2 - (2mn - (m^2 - n^2))^2. \end{aligned}\right.$$

Questa equazione ci mostra che il prodotto chiamato *congruo* da Leonardo Pisano nella sua opera suddetta *rappresenta l'area di un triangolo rettangolo del quale l'ipotenusa è*

$$2(m^2 + n^2),$$

ed i cateti sono

$$4mn\ ,\qquad 2(m^2 - n^2).$$

Più oltre nel medesimo *Liber quadratorum* di Leonardo Pisano si legge (2): *sed omnis numerus potest esse congruum si ex diuisione alicuius congrui per ipsum proueniat numerus quadratus, uel si ipse fuerit unus ex IIII.*or *adiacentibus, et reliqui*

(1) *Pacioli (Fra Luca) Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità (Con spesa e diligentia E opifitio del prudente homo Paganino de Paganini da Brescia. Nella excelsa cita de vinegia. cō gr̄a del suo excelso Dominio che per anni .X. proximi nullaltro in quello la possi restāpare ne altroue stāpata in quello portarle sotto pena in ditta gratia contenuta. Negliannì de nostra Salute M. cccc. lxxxiiij. adi 10. de nouembre)*, in fog. *Parte prima, Distinctio prima, Tractatus tertius, articulus septimus*, prima numerazione, carta 19,ª numerata 15, *verso*, lin. 48—57.— Tutto ciò che si legge nelle linee 24—29 di questa pagina 4 dalle parole *Con spesa* fino alla parola *nouembre* trovasi nel *recto* della carta numerata 76 (lin. 12—16) della seconda numerazione della edizione fatta nel 1494 e testè citata dell'anzidetta *Summa* di Fra Luca Pacioli.

(2) Codice Ambrosiano *E.* 75, *Parte superiore*, carta 31, *verso*, lin. 22—29.—*Tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, pag. 98, lin. 11—21.

tres fiant quadrati, ut si ponamus 9 *et* 16, *qui sunt quadrati, et coniunctus ex eis scilicet* 25 *est quadratus, et aufferatur* (sic) 9 *de* 16, *remanent* 7, *qui* 7 *potest esse congruum, multiplicatio quidem dupli de* 9 *in duplum de* 16 *facit quadratum numerum, scilicet* 576, *qui si multiplicetur per* 25 , *faciet iterum quadratum numerum, qui si ducatur per* 7, *faciet congruum, ergo* 7*ma* *eius pars erit quadrata.*

Cioè: « Siano h_1 , q due numeri razionali. Se si ha

» $$\frac{h}{h_1} = q^2 ,$$

» ovvero se uno qualunque dei quattro fattori

» $$m, \quad n, \quad m+n, \quad m-n$$

» è eguale ad h_1 , e ciascuno degli altri tre è un quadrato,
» il numero h_1 è *congruo*. Se si pone:

$$\text{(E)} \begin{cases} \dfrac{h}{q^2} = h_1 \\ \dfrac{x}{q} = x_1 , \quad \dfrac{y}{q} = y_1 , \quad \dfrac{z}{q} = z_1 , \end{cases}$$

» dividendo le equazioni (A) per q^2 si ha:

$$\text{(F)} \begin{cases} x_1^2 + h_1 = y_1^2 , \\ x_1^2 - h_1 = z_1^2 , \end{cases}$$

» e le equazioni (B), (E) danno:

$$\text{(G)} \begin{cases} h_1 = \dfrac{4mn(m+n)(m-n)}{q^2} , \\ x_1 = \dfrac{\pm(m^2+n^2)}{q} , \\ y_1 = \dfrac{\pm(2mn+(m^2-n^2))}{q} , \\ z_1 = \dfrac{\pm(2mn-(m^2-n^2))}{q} . \end{cases}$$

La seconda, la terza, e la quarta di queste equazioni danno:

$$
\text{(H)} \left\{
\begin{aligned}
&» \quad x_1^2 = \frac{(m^2+n^2)^2}{q^2} \,, \\
&» \quad y_1^2 = \frac{(2mn+(m^2-n^2))^2}{q^2} \,, \\
&» \quad z_1^2 = \frac{(2mn-(m^2-n^2))^2}{q^2} \,.
\end{aligned}
\right.
$$

» Se

$$» \quad m = 16 \,, \qquad n = 9 \,,$$

» si ha :

$$
\text{(I)} \left\{
\begin{aligned}
&» \; h = q^2 h_1 = 4mn(m+n)(m-n) = 2.\,9.\,2.16(16+9)(16-9) \\
&» \qquad = 18.32.25.7 = 576.25.7 = 2^2.3^2.4^2.5^2.7 = \overline{120}^2.\,7 \\
&» \qquad = 14400.\,7 = 100800 \,, \\
&» \; q^2 = \overline{120}^2 = 14400 \quad , \quad q = 120 \\
&» \; m^2 + n^2 = \overline{16}^2 + 9^2 = 256 + 81 = 337 \\
&» \; 2mn + (m^2 - n^2) = 2.\,16.\,9 + 16^2 - 9^2 = 288 + 256 - 81 \\
&» \qquad = 544 - 81 = 463 \\
&» \; 2mn - (m^2 - n^2) = 2.16.9 - (16^2 - 9^2) = 288 + 81 - 256 \\
&» \qquad = 369 - 256 = 113.
\end{aligned}
\right.
$$

» Quindi le equazioni (G) danno :

$$
\text{(J)} \left\{
\begin{aligned}
&» \quad h_1 = \frac{100800}{14400} = 7 \,, \\
&» \; x_1 = \frac{m^2+n^2}{q} = \frac{337}{120} = 2 + \frac{97}{120} \,, \\
&» \; y_1 = \frac{2mn+(m^2-n^2)}{q} = \frac{463}{120} = 3 + \frac{103}{120} \,; \\
&» \; z_1 = \frac{2mn-(m^2-n^2)}{q} = \frac{113}{120} \,. \; »
\end{aligned}
\right.
$$

Fra Luca Pacioli nella sua opera intitolata *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità* ec. scrive (1):

» Trouame vn numero quadrato che giontoci .6. facia
» quadrato etrattone .6. ancora remanghi quadrato. Dico
» che disposti li numeri congruenti quanti piu tanto meglio:
» vada prouando comenzando dal primo: seuine veruno che
» partito per .6. neuenga numero quadrato. Unde tu sai che
» .24. e il primo congruente partito per .6. neuen .4. che
» ene numero quadrato. Ora dico che tu tolga il numero
» quadrato congruo di quel congruente. che sai per le vie
» antedìtte ene .25. Or questo dico che parta per quello
» auenimento : cioe per .4. neuen .6 $\frac{1}{4}$. e questo ene lo
» adimandato numero : cioe .6 $\frac{1}{4}$ quale e quadrato : che
» la sua ℞ ene .2 $\frac{1}{2}$. Gionto adonca .6.a $\frac{1}{4}$ fa .12 $\frac{1}{4}$.
» che anche ene quadrato lacui ℞ e .3 $\frac{1}{2}$. e caua .6.
» de .6 $\frac{1}{4}$. resta . $\frac{1}{4}$. ancor quadrato : che la sua ℞
» e. $\frac{1}{2}$. siche in questo modo ticonuien regerte a simili che
» ancora ne porro vnaltra. p̄.a

» TRouame vn numero quadrato che giontoui .30. la sum-
» ma simelmente sia quadrata : etrattone .30. ancora el re-
» manente sia numero quadrato. Questa farai commo o ditto
» nella precedente cerca fra li numeri congruenti per vno che
» partito per .30. neuenga numero quadrato. E trouerai chel
» sira el secondo numero congruente: cioe .120 che partito in

---

(1) *Pacioli (Fra Luca) Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità. Parte prima, Distinctio prima, Tractatus tertius*, prima numerazione, carta 20.ª numerata 15, *verso*, lin. 24—37, carta 16, *recto*, lin. 2.

» .30. neuen .4. che e quadrato. Poi troua el numero quadrato
» congruo de questo numero congruente che sira .169. Ora
» parti questo .169. per quello .4. che prima venne : neuen
» 42 .$\frac{1}{4}$. e questo e lo adimandato numero quadrato : che la
» sua ℞ e .6 $\frac{1}{2}$. e giontoci .30. fara .72$\frac{1}{4}$. che ancora ene
» quadrato che la sua radici ene .8 $\frac{1}{2}$. E cauatone ancora
» .30. restara .12 $\frac{1}{4}$. che ancora e quadrato che la sua
» ℞ e .3 $\frac{1}{2}$. E cosi per te stesso in simili sequirai.

» Ma se cercando fra li numeri congruenti non potesse tro-
» uar vn numero congruente che partito commo e ditto per
» la quantita che se deue agiõguere e cauare : nonneuenisse
» numero quadrato : la ditta domanda si conuerebbe solue-
» re per altre che per le ditte regole : per che, le date re-
» gole sono confondatissima experientia a questo proportio-
» nate : commo appare a chi con diligentia le considera ꝛc.
» Oltra le quali regole ancora qui desotto fra le specie de-
» lalgorismo a piu tuo commodo e dilecto tenemetto vnal-
» tra generalissima che similiter te seruira in infinito auen-
» ga che per altre parole : ma sonno a vnò effecto e dispo-
» rotte li vna tauola deli ditti numeri congrui e congruenti
» trouati e apostati per men briga quando volesse alcun
» caso soluere. E dico così. Se voi trouare numeri congrui
» ꝛc. Qui sequente ancora ne mettero certe altre solute per
» certe altre regole straordinarie commo intenderai dicendo.
» Quedam questiones respectu quadratorum numerorum
» articulus nonus. » 2.

» TRouame vn numero quadrato che trattone .7. remanghi
» quadrato e giontoci .7. ancora la summa sia quadrata.
» Asoluer questa per vn altra via tieni amente .7. e .9. che
» fa .16. poi di .9. via .9. fa .81. e .16. via .16. fa .256. gio-
» gni insiemi fa .337. qual multiplica in se : fa .113569.

» poi dirai .9. via .16. fa .144. E poi dirai .25. via .144. fa
» .3600. questo multiplica per .4. fara .14400. Poi parti
» .113569. per .14400. neuira .1 $\frac{12769}{144000}$. e tanto dirai che
» fo lo adimandato numero: commo poi prouare. » (1)

Ciò che si legge in questo passo della suddetta *Summa* di Fra Luca Pacioli dalle parole *Trouame un numero quadrato che giontoci* 6 *facia quadrato* (2) fino alle parole *che la sua* ℞ *e* $3\frac{1}{2}$ (3) può essere tradotto in linguaggio algebrico nel modo seguente:

« Si domandano tre numeri x_1, y_1, z_1, tali che si abbia
» simultaneamente,

$$(K)\quad \begin{cases} x^2_1 + 6 = y^2_1, \\ x^2_1 - 6 = z^2_1. \end{cases}$$

(1) Si ha

$$\frac{113569}{14400} = \frac{100800+12769}{14400} = \frac{7.14400+12769}{14400} = 7 + \frac{12769}{14400}.$$

Quindi è chiaro che per errore, probabilmente di stampa, nel soprarrecato passo della *Summa* di Fra Luca Pacioli si legge 1 $\frac{12769}{14400}$ (Vedi la linea terza di questa pagina 8) in vece di 7 $\frac{12769}{14400}$. Questo errore trovasi tanto nell'edizione fatta in Venezia nel 1494 della suddetta *Summa* quanto nella ristampa fatta in Toscolano nel 1523 di quest'opera del medesimo Fra Luca (*Pacioli* (*Fra Luca*) *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità*, *edizione di Vinegia*, 1494 (indicata di sopra nella nota (1) della pagina 4), prima numerazione, carta 20.ª numerata 15, *recto*, lin. ultima. — *Pacioli* (*Fra Luca*) *Summa de Arithmetica geometria Proportioni: et proportionalità: Nouamente impressa In Toscolano* (per Paganino Paganini da Brescia nel 1523), in fog., prima numerazione, carta numerata 14, *verso*, linea ultima).

(2) Vedi sopra, pag. 7, lin. 3—4.

(3) Vedi sopra, pag. 8, lin. 7—8.

» Se

$$m = 2, \qquad n = 1,$$

» si ha

$$(L) \left\{ \begin{aligned} & h = q^2 h_1 = 4mn(m+n)(m-n) = 4.2.1.(2+1)(2-1) \\ & \qquad = 4.2.1.3.1 = 4.6 = 2^2.6 = 24, \\ & q^2 = 4 = 2^2, \qquad q = 2, \\ & m^2 + n^2 = 2^2 + 1^2 = 5, \\ & 2mn + (m^2 - n^2) = 2.2.1 + 2^2 - 1 = 7, \\ & 2mn - (m^2 - n^2) = 2.2.1 + 1^2 - 2^2 = 1, \\ & (m^2 + n^2)^2 = 5^2 = 25, \\ & (2mn + (m^2 - n^2))^2 = 7^2 = 49, \\ & (2mn - (m^2 - n^2))^2 = 1^2 = 1. \end{aligned} \right.$$

» Quindi le equazioni (G) danno:

$$(M) \left\{ \begin{aligned} & h_1 = \frac{24}{4} = 6, \\ & x_1 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}, \\ & y_1 = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}, \\ & z_1 = \frac{1}{2}, \end{aligned} \right.$$

» ó le equazioni (H) danno:

$$x^2_1 = \frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4}, \qquad y^2_1 = \frac{49}{4} = 12 + \frac{1}{4},$$

$$z^2_1 = \frac{1}{4}.$$

» Si domandano tre numeri x_1, y_1, z_1 tali che si abbia

» simultaneamente:

$$(N)\quad \begin{cases} x_1^2 + 30 = y_1^2 \\ x_1^2 - 30 = z_1^2 . \end{cases}$$

» Se

$$m = 3, \qquad n = 2,$$

» si ha

$$(O)\quad \begin{cases} h = q^2 h_1 = 4mn(m+n)(m-n) = 4.3.2(3+2)(3-2) \\ \qquad = 4.\,6.\,5.\,1 = 4.\,30 = 2^2.\,30 = 120, \\ q^2 = 4 = 2^2, \qquad q = 2, \\ m^2 + n^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13, \\ 2mn + (m^2 - n^2)^2 = 2\ 3.\,2 + 3^2 - 2^2 = 12 + 9 - 4 \\ \qquad = 17, \\ 2mn - (m^2 - n^2) = 2.\,3.\,2 + 2^2 - 3^2 = 12 + 4 - 9 \\ \qquad = 7, \\ (m^2 + n^2)^2 = 13^2 = 169, \\ (2mn + (m^2 - n^2))^2 = \overline{17}^2 = 289, \\ (2mn - (m^2 - n^2))^2 = 7^2 = 49 . \end{cases}$$

» Quindi le equazioni (G) danno:

$$(P)\quad \begin{cases} h_1 = \frac{120}{4} = 30, \\ x_1 = \frac{13}{2} = 6 + \frac{1}{2}, \\ y_1 = \frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{2}, \\ z_1 = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} . \end{cases}$$

» e le equazioni (H) danno

$$» \; x_1^2 = \frac{169}{4} = 42 + \frac{1}{4} ,$$

$$» \; y^2_1 = \frac{289}{4} = 72 + \frac{1}{4} ,$$

$$» \; z^2_1 = \frac{49}{4} = 12 + \frac{1}{4} .$$

Ciò che si legge nel passo soprarrecato della *Summa* di Fra Luca Pacioli dalle parole *Trouame vn n.° quadrato che trattone 7 remanghi quadrato* (1) fino alle parole *che fo lo adimandato numero* (2) può essere tradotto in linguaggio algebrico nel modo seguente :

» Si domandano tre numeri x_1, y_1, z_1, tali che si abbia » simultaneamente:

$$(Q) \quad \begin{cases} x^2_1 + 7 = y^2_1 , \\ x^2_1 - 7 = z^2_1 , \end{cases}$$

» Se

$$» \; m = 16 , \qquad n = 9 ,$$

» si ha :

$$(R) \quad \begin{cases} h_1 = 7 , \\ h_1 + n = 7 + 9 = 16 = m , \\ n^2 = 9^2 = 81 , \quad \overline{m}^2 = \overline{16}^2 = 256 , \\ m^2 + n^2 = 256 + 81 = 337 , \\ (m^2 + n^2)^2 = \overline{337}^2 = 113569, \\ mn = 16.9 = 144 , \\ m + n = 16 + 9 = 25 , \\ 4mn(m + n) = 4.25.144 = 4.3600 = 14400 , \\ x^2_1 = \frac{(m^2 + n^2)^2}{4mn(m + n)} = \frac{113569}{14400} = 7 + \frac{12769}{14400} . \text{»} \end{cases}$$

(1) Vedi sopra, pag. 8, lin. 27—28.
(2) Vedi sopra, pag. 9, lin. 3—4.

Dalle prime due delle equazioni (R) si ha

$$m - n = h_1 = 7.$$

Quindi la prima delle equazioni (G) dà

$$q^2 = \frac{4mn(m+n)(m-n)}{h_1} = 4mn(m+n).$$

Se adunque nella prima delle equazioni (H) si sostituisce $4mn(m+n)$ in vece di q^2 si ha

$$x_1^2 = \frac{(m^2+n^2)^2}{4mn(m+n)},$$

cioè il valore di x_1^2 dato dall'ultima delle equazioni (R).

Nel *Liber quadratorum* di Leonardo Pisano si legge (1): *Volo inuenire quadratum cui addito* 5, *vel diminuto faciat quadratum numerum. Adiaceat congruum cui* (sic) *quinta pars sit quadrata, eritque* 720, *cuius quinta pars est* 144, *in quo diuide quadratos congruentes eidem* 720, *quorum primus est* 961, *secundus est* 1681, *tertius autem est* 2401, *et est radix primi quadrati* 31, *secundi* 41, *tertii* 49, *exibit pro primo quadrato* $\frac{97}{144}6$, *cuius radix est* $\frac{7}{12}2$, *qui prouenit ex diuisione* 31 *in radicem de* 144, *hoc est in* 12, *et pro secundo, hoc est pro quesito quadrato, ueniet* $\frac{97}{144}$ 11, *cuius radix est* $\frac{5}{12}$ 3, *que prouenit ex divisione* 41 *in* 12, *et pro ultimo quadrato ueniet* $\frac{97}{144}16$, *cuius radix est* $\frac{1}{12}4$.

Cioè: « Se

» $m = 5$, $n = 4$,

» si ha:

(1) Codice Ambrosiano *E*. 75, *Parte superiore*, carta 31, *recto*, lin. 10—18. — *Tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, pag. 96, lin. 2—13.

» $h = h_1 q^2 = 4mn(m+n)(m-n) = 4.5.4\,(5+4)(5-4)$

» $\quad = 5.\,4^2.3^2.\,1^2 = 5.\,\overline{12}^2 = 5.\,144 = 720,$

» $q^2 = \overline{12}^2 = 144\,, \qquad q = 12\,,$

(S) » $m^2 + n^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41\,,$

» $2mn + (m^2 - n^2) = 2.\,5.\,4 + (5^2 - 4^2)$

» $\quad = 40 + 25 - 16 = 49\,,$

» $2mn - (m^2 - n^2) = 2.\,5.\,4 + (4^2 - 5^2)$

» $\quad = 40 + 16 - 25 = 31\,;$

» $(m^2 + n^2)^2 = \overline{41}^2 = 1681\,,$

» $(2mn + (m^2 - n^2))^2 = 49^2 = 2401,$

» $(2mn - (m^2 - n^2))^2 = \overline{31}^2 = 961\,;$

» quindi le equazioni (G) danno

» $h_1 = \frac{720}{144} = 5,$

» $x_1 = \frac{41}{12} = 3 + \frac{5}{12}\,,$

(T) » $y_1 = \frac{49}{12} = 4 + \frac{1}{12},$

» $z_1 = \frac{31}{12} = 2 + \frac{7}{12}\,.$

» e le equazioni (H) danno:

$$» \; x^2_1 = \frac{1681}{144} = 11 + \frac{97}{144},$$

$$» \; y^2_1 = \frac{2401}{144} = 16 + \frac{97}{144},$$

$$» \; z^2_1 = \frac{961}{144} = 6 + \frac{97}{144}.$$

I valori di h_1, x_1, y_1, z_1 dati dalle equazioni (G) saranno razionali se q è razionale, giacchè m, n, sono per ipotesi razionali (1). Ora dalla prima delle equazioni (G) si ha

$$\text{(U)} \qquad q = \sqrt{\left(\frac{4mn(m+n)(m-n)}{h_1}\right)}.$$

Affinchè dunque q sia razionale è necessario che il rapporto

$$\frac{4mn(m+n)(m-n)}{h_1}$$

sia un quadrato. Leonardo Pisano e Fra Luca Pacioli nelle soluzioni riportate di sopra rendono quadrato questo rapporto ne'modi seguenti:

1.° Modo. Se si ha

$$h_1 = mn(m+n)(m-n),$$

l'equazione (U) dà

$$q = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2.$$

Per tal modo Fra Luca Pacioli nel passo soprarrecato della sua *Summa* (2) ottiene un valore razionale di q nei casi di

$$h_1 = 6, \qquad h_1 = 30.$$

In fatti dalle due prime delle equazioni (L) si ha:

$$h_1 = mn(m+n)(m-n) = 2.1(2+1)(2-1) = 6,$$

(1) Vedi sopra, pag. 3, lin. 4—15.

(2) Vedi sopra, pag. 7, pag. 8, lin. 1—24, pag. 10—11, pag. 12, lin. 1—4.

e dalle due prime delle equazioni (O) si ha

$$h_1 = mn(m + n)(m - n) = 3.2(3 + 2)(3 - 2) = 6.5.1 = 30.$$

2.° Modo. Se r, s, t, sono tre numeri razionali tali che si abbia simultaneamente

$$(V) \begin{cases} m - n = h_1 , \quad m = r^2 , \quad n = s^2 , \\ m + n = r^2 + s^2 = t^2 , \end{cases}$$

si ha :

$$\frac{4mn(m + n)(m - n)}{h_1} = 4mn(m+n) = 4r^2s^2t^2,$$

quindi l' equazione (U) dà:

$$(U_1) \qquad q = 2rst.$$

Per tal modo Leonardo Pisano nel primo de'tre passi soprarrecati del suo *Liber quadratorum* (1), e Fra Luca Pacioli nel passo della sua *Summa* riportato di sopra (2), ottengono un valore razionale di q nel caso di

$$h_1 = 7 ,$$

giacchè se

$$m = r^2 = 16 = 4^2 , \qquad n = s^2 = 9 = 3^2 ,$$

si ha anche:

$$m - n = 16 - 9 = 7 = h_1 ,$$
$$m + n = t^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2,$$
$$r = 4 , \quad s = 3 , \quad t = 5 ;$$

e però l'equazione (U_1) dà

$$q = 2.4.3.5 = 120,$$

3.° Modo. Se s, t, u sono tre numeri razionali tali che si

(1) Vedi sopra, pag. 4, lin. 19—22, 36—37, pag. 5—6.
(2) Vedi sopra, pag. 8, lin. 27—31, pag. 9, lin. 1—4, pag. 12, lin. 5—27.

abbia simultaneamente

$$(W)\begin{cases} m = h_1, & n = s^2, \\ m + n = t^2, & m - n = u^2, \end{cases}$$

si ha:

$$\frac{4mn(m+n)(m-n)}{h_1} = 4n(m+n)(m-n) = 2^2 s^2 t^2 u^2;$$

quindi l'equazione (U) dà:

$$(U_2) \qquad q = 2stu.$$

Per tal modo Leonardo Pisano nel terzo de'tre passi del suo *Liber quadratorum* riportati di sopra (1), ottiene un valore razionale di q nel caso di

$$h_1 = 5,$$

giacchè se

$$m = 5 = h_1, \qquad n = 4 = 2^2,$$

si ha:

$$m + n = 5 + 2^2 = 9 = 3^2, \quad m - n = 5 - 2^2 = 1 = 1^2,$$

$$s = 2, \quad t = 3, \quad u = 1,$$

e però l'equazione (U_2) dà

$$q = 2.\,2.\,3.\,1 = 12.$$

Il Padre Don Pietro Cossali nella sua opera intitolata *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra*, dopo avere esposto ed applicato al caso di

$$h_1 = 6,$$

la risoluzione indicata di sopra delle equazioni (F) (2), soggiunge (3):

---

(1) Vedi sopra, pag. 13, lin. 9—26, pag 14, pag. 15, lin. 1—3.

(2) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra. Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita di D. Pietro Cossali C. R. Dalla Reale Tipografia Parmense*, 1797—1799, due volumi, in 4°, vol. I, pag. 131, lin. 1—16. — Vedi sopra, pag. 5, lin. 8—23, pag, 6, lin. 1—4.

(3) *Cossali, Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra*, vol. I, pag. 131, lin. 17—30.

« L'esposto metodo però, oltre ad essere indiretto, era
» eziandio presso Leonardo e gli altri che tennergli dietro
» tanto limitato, quanto limitata era presso di loro la Ta-
» vola dei numeri congrui, e congruenti, ristretta a quelli
» soli che generazione ricevono dai numeri razionali interi.
» È avvertita questa imperfezione da Fra Luca. E fu dessa,
» che costrinse Leonardo, e gli analisti italiani succedutigli
» per lo spazio di quasi tre secoli andar tentone in quei ca-
» si, che al metodo si sottraevano: con che però rinveniro-
» no delle ingegnose regole particolari, da essi dette *straor-*
» *dinarie*. Trascelgo la regola per il 7, per il problema cioè
» di trovar un numero quadrato, al quale aggiunto o de-
» tratto il 7, provenga ed aggregato, e residuo quadrato.
» Ecco in compendio la regola. Sarà $\frac{((7+2)^2+(2.7+2)^2)^2}{4(7+2)(2.7+2)(3.7+4)}$
» il quadrato desiderato. Ed in vero $\frac{((7+2)^2+(2.7+2)^2)^2}{4(7+2)(2.7+2)(3.7+4)}\pm 7$
$=\frac{(9^2+16^2)^2}{4.\ 9.\ 16.\ 25}=\frac{113569}{14400}\pm 7=\frac{113569\pm 100800}{14400}$: nella qual
» frazione essendo manifestamente quadrato il denominatore
» $=120^2$, non rimane a dimostrarsi, fuorchè esserlo pure in
» ambedue i casi, del segno $+$, e del segno $-$ il nume-
» ratore. E così è, essendo $113569+100800=214369$
» $=463^2$; e $113569-100800=12769=113^2$. Dunque la re-
» gola è giustissima. Or cerchiam noi, se ad altri numeri, e
» quali, trasportar si possa. Sostituita al numero 7 la spezie
» indeterminata h avremo
» $\frac{((h+2)^2+(2h+2)^2)^2}{4(h+2)(2h+2)(3h+4)}\pm h=\frac{(5h^2+12h+8)^2}{4(6h^3+26h^2+36h+16)}\pm h$
» $=\frac{25h^4+120^3+224h^2+192h+64\pm(24h^4+104h^3+144h^2+64h)}{4(6h^3+26h^2+36h+16)}$ ».

Quindi sembra che secondo il Padre Cossali l' *altra via* menzionata da Fra Luca Pacioli nel passo soprarrecato della sua *Summma* (1) sia quella di porre:

(1) Vedi sopra, pag. 8, lin. 29.

$$(X)\quad \begin{cases} m = 2h_1 + 2\,, \\ n = h_1 + 2\,, \\ m + n = 2h_1 + 2 + h_1 + 2 = 3h_1 + 4\,, \\ m - n = h_1\,. \end{cases}$$

Da queste equazioni si ha:

$$\frac{4mn(m+n)(m-n)}{h_1} = 4mn(m+n) = 4(h_1+2)(2h_1+2)(3h_1+4)$$

quindi l'equazione (U) dà

$$(Y)\qquad q = \sqrt{4(h_1+2)(2h_1+2)(3h_1+4)} = 2\sqrt{mn(m+n)}\,,$$

e però q non sarà razionale se il prodotto

$$(h_1 + 2)(2h_1 + 2)(3h_1 + 4)$$

non è quadrato. Ora non tutti i valori di h_1 ma alcuni solamente di questi valori renderanno quadrato questo prodotto, come lo stesso Padre Cossali avverte nella sua opera suddetta scrivendo (1) : « Dunque la regola varrà per tutti i » numeri h idonei a rendere $6h^3 + 26h^2 + 36h + 16$ qua- » drato, e non varrà per gli altri. »

Quindi parrebbe doversi credere che l'*altra via* menzionata nel suddetto passo della *Summa* di Fra Luca Pacioli (2) consista nel dare ai fattori

$$m\,,\ n\,,\ m+n\,,\ m-n$$

i valori (V), e non già i valori (X); giacchè i primi rendono sempre razionale q, mentre i secondi non rendono q razio-

(1) *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in esso dell'algebra*, vol. I, pag. 122, lin. 23–25.

(2) Vedi sopra, pag. 8, lin. 29.

nale se h_1 non è tale che il prodotto

$$(h_1+2)(2h_1+2)(3h_1+4)$$

sia un quadrato.

Se

$$h_1=7$$

si ha

$$m=2h_1+2=2.7+2=16=4^2=r^2,$$

$$n=h_1+2=7+2=9=3^2=s^2,$$

$$m+n=3h_1+4=3.7+4=25=5^2=t^2,$$

e quindi:

$$4mn(m+n)=(h_1+2)(2h_1+2)(3h_1+4)=2^2r^2s^2t^2$$

$$=2^2\,3^2.\,4^2\,5^2=\overline{120}^2.$$

Se adunque nel caso di

$$h_1=7,$$

il prodotto

$$(h_1+2)(2h_1+2)(3h_1+4)$$

è quadrato, ciò avviene per essere in questo caso quadrato ciascuno dei fattori

$$m,\ n,\ m+n.$$

Questa condizione è espressa dai valori (V) di questi fattori.

Nell'edizione fatta in Lione nel 1774 degli *Élémens d'algèbre* di Leonardo Euler si legge (1):

» IV.) Les deux formules $pp-5qq$ & $pp+5qq$ devien-
» nent pareillement des quarrés: savoir quand $p=41$ &
» $q=12$; car alors $pp-5qq=1681-720=961=31^2$,
» & $pp+5qq=1681+720=2401=49^2$.

» V.) Les deux formules $pp-7qq$ & $pp+7qq$ sont des

(1) *Élémens d'algèbre par M. Léonard Euler traduits de l' Allemand avec des notes et des additions. A Lyon Chez Jean Marie Bruyset père et fils M. DCC. LXXIV. Avec Approbation et Privilège du Roi*, due tomi, in 8.°, *tome second*, pag. 291, lin. 3—12, paragrafo 226.

» quarrés, si $p=337$ & $q=120$; car la premiere alors est
» $= 113569 - 100800 = 12769 = 113^2$, & la seconde est
» $= 113569 + 100800 = 214369 = 463^2$. »

Nella ristampa de'medesimi *Élémens d'algèbre* di Leonardo Euler fatta in Parigi nel settembre del 1807 si legge (1):

» 4.° Les deux formules $pp - 5qq$ et $pp + 5qq$ devien-
» nent pareillement des carrés; savoir, quand

$$» \quad p = 41, \quad q = 12;$$

» car alors

$$» \quad pp - 5qq = 1681 - 720 = 961 = 31^2,$$

» et

$$» \quad pp + 5qq = 1681 + 720 = 2401 = 49^2.$$

» 5.° Les deux formules $pp - 7qq$ et $pp + 7qq$ sont des
» carrés si

$$» \quad p = 337, \quad q = 120;$$

» car la première alors est $= 113569 - 100800 = 12769$
» $= 113^2$, et la seconde est $= 113569 + 100800 = 214369$
» $= 463^2$. »

Ciò che si è detto di sopra dalla quarta linea della pagina 3 alla linea quarta della pagina 9, e dalla linea quinta della pagina 12 alla linea terza della pagina 15, dimostra:

1.° Che la soluzione data da Leonardo Euler in questo passo de'suoi *Élémens d'algèbre* del caso di

$$h_1 = 5$$

---

(1) *Élémens d'algèbre, par Léonard Euler, traduits de l'Allemand. Nouvelle édition, revue et augmentée de notes, par J. G. Garnier, Ex-Professeur à l'École Polytéchnique, et Instituteur. A Paris, Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57; Mairé, Libraire, rue Mercière, à Lyon. Septembre 1807*, due tomi, in 8°, *tome second*, pag. 215, lin. 5—16, paragrafo 226.







